EXERCICE N°1 : 25' 5 points

On considère l'équation différentielle (E) : $(1 + e^{2x})\, y' - y = 0$. **1)** On pose $z = y\sqrt{1 + e^{2x}}$

a) Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_0) : $z' - z = 0$

b) Résoudre (E_0) puis déduire la solution générale de (E).

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$. On désigne par (C) la courbe de f.

a) Vérifier que f est une solution particulière de (E). **b)** Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion que l'on déterminera.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Montrer que $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1 - x^2}\right)$ pour tout $x \in I$.

EXERCICE N°2 : 35' 6 points

1) On considère les équations différentielles (E) : $y' - 4y = 0$ et (F) : $y'' - 4y = 0$. **a)** Résoudre (E).

b) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = e^{2x} f(x)$.

Montrer que f est une solution de (F) sssi g' est une solution de (E).

c) En déduire que l'ensemble des solution de (F) est $\left\{ f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x} \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

2) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + 4t^2}}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer φ'.

b) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} \geq \dfrac{1}{1 + 2t}$. Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

c) En admet que φ est impaire. Montrer que φ admet une fonction réciproque ψ définie sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi'(x) = \sqrt{1 + 4\psi^2(x)}$. Calculer $\psi(0)$ et $\psi'(0)$.

b) Montrer alors que ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle est une solution de (F).

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$.

d) Prouver alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right)$.

EXERCICE N°3 : 25' 4 points

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'' + y = 0$.

2) Soit l'équation différentielle (E_2) : $y'' + \dfrac{1}{x^4} y = 0$. **a)** Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $f(x) = x\, g\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que f est une solution de (E_1) $\Leftrightarrow$ g est une solution de (E_2).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_2). 3) Calculer alors l'intégrale $I = \displaystyle\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$.